IES TRASSIERRA

2º BTO CS-I -PRUEBA ESCRITA DE ANÁLISIS 9-02-2010

Nombre: ____

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] De entre todas las rectas del plano que pasan por el punto $(1,2)$, encuentra aquella que forma con las partes positivas de los ejes coordenados un triángulo de área mínima. Halla el área de dicho triángulo.

Ejercicio 1.- Sea la función $f:[0,4]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & \text{si} \quad 0\le x<2 \\ cx+1 & \text{si} \quad 2\le x\le 4\end{cases}$$

(a) [2 puntos] Determina a, b y c sabiendo que f es continua en el intervalo cerrado $[0,4]$, derivable en el intervalo abierto $(0,4)$ y que $f(0)=f(4)$.

(b) [0'5 puntos] ¿En qué punto del intervalo se anula la derivada de la función?

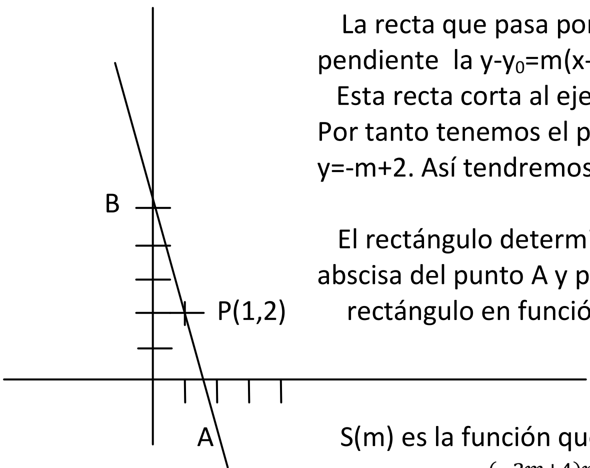
Ejercicio 2.- Considera las funciones $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\longrightarrow\mathbb{R}$ y $g:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x)=\frac{\text{sen } x}{\cos^3 x} \qquad \text{y} \qquad g(x)=x^3\ln x \qquad (\ln \quad \text{denota la función logaritmo neperiano}).$$

(a) [1'25 puntos] Halla la primitiva de f que toma el valor 1 cuando $x=\frac{\pi}{3}$ (se puede hacer el cambio de variable $t=\cos x$).

(b) [1'25 puntos] Calcula $\int g(x)\,dx$.

1.-



La recta que pasa por el punto P(1,2), tiene de ecuación punto pendiente la $y-y_0=m(x-x_0)$; $y-2=m(x-1)$; $y=mx-m+2$.

Esta recta corta al eje OX en (haciendo y=0 y despejando) x= (m-2)/m. Por tanto tenemos el punto A((m-2)/m, 0). Al eje OY (haciendo x=0) en y=-m+2. Así tendremos el punto B(0, -m+2)

El rectángulo determinado por la recta sobre los ejes tiene de base la abscisa del punto A y por altura la ordenada de B. Así, la superficie del rectángulo en función de m será S=

$S(m) = (-m+2)*(m-2)/m=\frac{-m^2+4m-4}{m}$

S(m) es la función que tenemos que optimizar (calcular su mínimo).

Para ello, calculamos la derivada de S: $S'=\frac{(-2m+4)m-1(-m^2+4m-4)}{m^2}=\frac{-m^2+4}{m^2}=-1+\frac{4}{m^2}$

S' se anula cuando lo hace su numerador: m=$\pm$2.

Comprobamos el signo de la 2ª derivada:

$S'=-1+\frac{4}{m^2}=-1+4m^{-2}$; $S''=4\cdot(-2)m^{-3}=\frac{-8}{m^3}$

$$S''(2)=\frac{-8}{2^3}=-1<0\rightarrow m=2\ es\ mínimo\ relativo$$

$$S''(-2)=\frac{-8}{(-2)^3}=+1>0\rightarrow m=-2\ es\ máximo\ relativo$$

Por tanto, la recta que determina un triángulo de área mínima es y=mx-m+2.
y=-2x-(-2)+2; y=-2x+4

El triángulo que determina tiene de vértices A(2,0), B(0,4) y el origen O(0,0).

Su área es de S=(2*4)/2=4 u^2.

SEGUNDO EJERCICIO

Ejercicio 1.- Sea la función $f:[0,4]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & \text{si} \quad 0\le x<2 \\ cx+1 & \text{si} \quad 2\le x\le 4 \end{cases}$$

(a) [**2 puntos**] Determina a, b y c sabiendo que f es continua en el intervalo cerrado $[0,4]$, derivable en el intervalo abierto $(0,4)$ y que $f(0)=f(4)$.

(b) [**0'5 puntos**] ¿En qué punto del intervalo se anula la derivada de la función?

f(x) está definida como dos ramas polinómicas de grado dos (parábola) y de grado 1 (recta). Ambas ramas son continuas y derivables en sus intervalos de definición, como todo polinomio. Al indicarnos que es continua en [0,4] y derivable en (0,4) nos permite establecer relaciones entre ambas ramas para calcular los coeficientes pedidos.
Así:
En x= 2 f(x) es continua

$$f(2)=2c+1;\lim_{x\to2^-}f(x)=4+2a+b;\ \lim_{x\to2^+}f(x)=2c+1$$

Al igualar los tres tenemos la ecuación(I): $2c+1=4+2a+b$; $2a+b-2c=-3$ (I)
También en x=2 f(x) es derivable. Hacemos la derivada y obligamos a que sea derivable en ese punto:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+a & 0<x<2 \\ c & 2<x<4 \end{cases}$$

Para ellos, las derivadas laterales en x=2 las hacemos iguales:

$$f'(2^-)=\lim_{x\to2^-}f'(x)=2\cdot2+a=4+a;\ f'(2^+)=c$$

Igualando ambas, tenemos la ecuación (II): 4+a=c
El enunciado indica que f(0)=f(4).
Por tanto podemos tener una 3ª ecuación para poder calcular los 3 parámetros que propone el ejercicio:

$$\left.\begin{array}{c} \mathrm{f}(0)=\mathrm{b} \\ \mathrm{f}(4)=4\mathrm{c}+1 \end{array}\right\}\rightarrow b=4c+1$$

Si sustituimos el valor de b dado por esta ecuación en las (I) anterior, tendremos que:
(I): $2a+b-2c=-3;2a+4c+1-2c=-3;2a+2c=-4;\quad a+c=-2$
<u>**Si la ec (II) era: 4+a=c, tendremos rápidamente que a= -3, c=+1 y b=5**</u>

b) ¿En qué punto del intervalo se anula la derivada?
Conocidos ya a, b y c, la función derivada queda como:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-3 & 0 < x < 2 \\ 1 & 2 \le x < 4 \end{cases}$$

La derivada se puede anular en (1,2). Igualamos la derivada a cero y obtenemos x=3/2, que sí pertenece a esa parte del intervalo y que corresponde al vértice de la rama parabólica que constituye la primera parte de la función.

TERCER EJERCICIO

Ejercicio 2.- Considera las funciones $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x} \qquad \text{y} \qquad g(x) = x^3 \ln x \qquad (\ln \quad \text{denota la función logaritmo neperiano}).$$

(a) **[1'25 puntos]** Halla la primitiva de f que toma el valor 1 cuando $x = \frac{\pi}{3}$
(se puede hacer el cambio de variable $t = \cos x$).

(b) **[1'25 puntos]** Calcula $\int g(x)\,\mathrm{d}x$.

---

a) Nos piden la primitiva de f(x) que pase por el punto $({}^{\pi}/_{3}, 1)$. Haremos primero la integral indefinida y luego particularizaremos para las condiciones de contorno dadas:

$$\int \frac{senx}{cos^3 x} dx = \begin{bmatrix} t = cosx \\ dt = -senxdx \end{bmatrix} = \int \frac{-1}{t^3} dt = \int -t^{-3} dt = -\frac{t^{-2}}{-2} + C$$

$$= (deshaciendo\ el\ cambio\ de\ variable\ y\ ) = \frac{1}{2cos^2 x} + C$$

F(x)= $\frac{1}{2cos^2 x} + C.$

Particularizando para x=${}^{\pi}/_{3}$ $F({}^{\pi}/_{3}) = \frac{1}{2cos^2 {}^{\pi}/_{3}} + C = \frac{1}{2{\cdot}{}^{1}/_{2}{}^{2}} + C = 2 + C = 1; C = -1$

Por tanto, F(x)= $\boldsymbol{\frac{1}{2cos^2 x} - 1.}$

b)

$$\int x^3 lnx\, dx = \left[Integrando\ por\ partes \quad \begin{matrix} u = lnx & du = \boldsymbol{\frac{1}{x} dx} \\ dv = x^3 dx; & v = \frac{x^4}{\boldsymbol{4}} \end{matrix} \right] = \frac{x^4}{\boldsymbol{4}} lnx - \int \frac{x^4}{\boldsymbol{4}} \boldsymbol{\frac{1}{x} dx} =$$

$$\frac{x^4}{\boldsymbol{4}} lnx - \int \frac{x^3}{\boldsymbol{4}} \boldsymbol{dx} = \frac{x^4}{\boldsymbol{4}} lnx - \frac{x^4}{\boldsymbol{16}} + \boldsymbol{C}$$